

ФУНКЦИЯ ҰҒЫМЫ. ФУНКЦИЯНЫҢ МӘНІ ЖӘНЕ ШЕГІ

Шәкір Айдос Ғанижанұлы

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

математика кафедрасының аға оқытушысы, PhD

23 қыркүйек 2024
Алматы, Қазақстан



Дәрістің мақсаты – функцияның анықтамасын білу, функцияның нүктедегі мәні мен шегін есептей алу

Негізгі сұрақтар:

- 1 Функция. Күрделі функция. Функция берілуі
- 2 Функцияның анықталу және мәндер облыстары
- 3 Функция шегі нүктеде үзіліссіздігі. Коши мен Гейне бойынша үзіліссіздік



Функция ұғымы

Математикалық анализдің негізгі ұғымдарының бірі — функция ұғымы. Біз нақты бір аргументтен тәуелді нақты функцияны қарастырамыз. X және Y сан жиындары болсын.

Definition

Егер әрбір $x \in X$ айнымалысына белгілі бір ереже бойынша $y \in Y$ саны сәйкестендірілсе, онда X жиынында

$$y = y(x) \quad \text{немесе} \quad y = f(x)$$

функциясы берілген деп айтылады. Мұндағы x — тәуелсіз айнымалы немесе *аргумент*, y — тәуелді айнымалы, X жиыны функцияның *анықталу облысы*, ал Y жиыны функцияның *мәндер жиыны* деп аталады.

Функцияны белгілеу кезінде басқа да белгілер қолданылады, мысалы:

$$y = g(x), \quad y = \varphi(x), \quad y = F(x), \dots$$

$x_0 \in X$ болса, онда

$$y_0 = f(x_0)$$

санын функцияның *дербес мәні* деп атайды.



Егер функцияның барлық мәндері өзара тең болса, онда оны *тұрақты функция* деп атайды.

$f(x)$ функциясы X жиынында *жоғары* немесе *төменгі жағынан шектелген* деп аталады, егер тұрақты сандар M және m табылып, кез келген $x \in X$ үшін

$$f(x) \leq M \quad (\text{немесе} \quad f(x) \geq m)$$

теңсіздігі орындалса.

Егер функция жоғарғы және төменгі жағынан шектелген болса, оны *шектелген функция* деп атайды. Басқа жолмен:

$$\exists K > 0 : \quad |f(x)| \leq K, \quad \forall x \in X.$$

Функцияның *графикі* деп жазықтықтағы $(x, f(x))$, $x \in X$ нүктелер жиынын атайды.

Функцияның берілу тәсілдері

Аналитикалық тәсіл. Аргумент пен тәуелді айнымалы арасындағы байланыс формула арқылы беріледі.

Мысалдар.

- 1 $y = x^2$, анықталу облысы $(-\infty, +\infty)$, мәндер жиыны $[0, +\infty)$.
- 2 $y = \sqrt{1 - x^2}$, анықталу облысы $[-1, 1]$, мәндер жиыны $[0, 1]$.



Қосымша функциялар мысалдары

- 3 $y = n!$ Бұл функция натурал сандар жиынында берілген, мәндер жиыны: $1!, 2!, \dots, n!$.
- 4 Функция *signum* немесе

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{егер } x > 0, \\ 0, & \text{егер } x = 0, \\ -1, & \text{егер } x < 0. \end{cases}$$

(sgn белгісі латынның *signum* — "таңба" деген сөзінен алынған). Функция $(-\infty, +\infty)$ анықталған, мәндер жиыны: $-1, 0, +1$.

- 5 Дирихле функциясы:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{егер } x \text{ рационал сан болса,} \\ 0, & \text{егер } x \text{ иррационал сан болса.} \end{cases}$$

Бұл функция $(-\infty, +\infty)$ анықталған, мәндер жиыны: 0 және 1.



Кестелік тәсіл

Бұл тәсілде аргумент пен тәуелді айнымалы арасындағы байланыс кесте арқылы беріледі. Мысалы:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Анықталу облысы — x_i мәндері, мәндер жиыны — y_i . Кесте тек аргументтің шекті мәндерінде беріледі. Мысалы, тригонометриялық немесе логарифмдік функциялардың кестелері.

Графикалық тәсіл

Физикалық өлшеулерде жиі кездеседі. Айнымалы x пен y арасындағы байланыстың графигі беріледі.

Функциялардың композициясы

f және φ функциялары сәйкесінше X және Y жиындарында анықталып, φ функциясының мәндер жиыны f функциясының анықталу облысында жатсын, онда кез келген x мәніне белгілі бір ереже бойынша $F = f(\varphi(x))$ функциясының бір мәні сәйкес келіп,

$$F = f[\varphi(x)]$$

функциясы анықталады. Осы $F = f[\varphi(x)]$ функциясын f және φ функцияларының композициясы немесе күрделі функция деп атайды. Мұндағы x — тәуелсіз айнымалы, y — аралық аргумент.



Қайсыбір f және φ функцияларының композициясын

$$(f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x)) \quad \text{немесе} \quad \varphi \circ f$$

түрінде жазады.

Айта кететін жағдай: күрделі функция айнымалылардың тәуелділігін емес, олардың берілу тәсілдерін сипаттайды.

Функцияның айқындалмаған түрде берілуі

$$F(x, y) = 0$$

теңдеуі y айнымалысын x -тен тәуелді функция ретінде анықтайды. Бұл $y(x)$ айнымалысы берілген x -пен бірге $F(x, y(x)) = 0$ теңдеуін қанағаттандырады, демек, x белгілі мәнінде $F(x, y) = 0$ теңдеуінің шешімі болады. Мұндай $y(x)$ функциясының берілуін *айқындалмаған түрде берілу* деп атайды.

Функция шегі. Біржақты шектер

Айталық, $f(x)$ функциясы X сан жиынында анықталсын.



Definition (Шектік нүкте)

Егер x_0 нүктесінің кез келген аймағында X жиынының x_0 өзгеше x нүктесі жатса, x_0 нүктесін X жиының *шектік нүктесі* деп атайды. Шектік нүкте X жиынында жатуы да, жатпауы да мүмкін.

X жиынынан x_0 -ке жинақты

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (x_n \neq x_0) \quad (1)$$

тізбегін аламыз, сәйкес функция мәндері

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots \quad (2)$$

сан тізбегін құрады.



Definition (Гейне бойынша шек)

x_0 нүктесіне жинақты (1) тізбек бойынша құрылған (2) тізбек b санына жинақты болса, онда b санын $f(x)$ функциясының $x = x_0$ нүктесіндегі немесе $x \rightarrow x_0$ шегі деп атайды. Оны былай жазады:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \quad \text{немесе} \quad x \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x) \rightarrow b.$$

$f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде жалғыз шегі бар, бұл $\{f(x_n)\}$ жинақты тізбектің жалғыз шегі болатынан шығады.

Definition (Коши бойынша шек)

Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, кез келген $x \in X, x \neq x_0$ мәндерінде

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon \quad (3)$$

теңсіздігі орындалса, b санын $f(x)$ функциясының $x = x_0$ нүктесіндегі шегі деп атайды. Бұл анықтаманы функция шегінің “ ε - δ ” тіліндегі анықтамасы деп атайды.



Theorem

Функция шегінің бірінші және екінші анықтамасы эквивалентті.



Мысалдар

- 1 $f(x) = C$, ($C = \text{const}$) тұрақты функцияның сан өсінің әрбір x_0 нүктесінде шегі бар. Шынында, егер (1) кез келген x_0 нүктесіне жинақты тізбек болса, онда (2) тізбек $C, C, \dots, C, \dots$ түрде жазылады. Демек, $x = x_0$ болса, $f(x_0) = C$, онда

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow f(x_n) \rightarrow C \quad \text{немесе} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C.$$

Сонымен, тұрақты функцияның шегі осы санның өзіне тең.

- 2 $f(x) = x$ функциясының сан түзудің кез келген x_0 нүктесінде шегі бар және ол x_0 тең. Бұл жағдайда (1) және (2) тізбек тепе-тең болады. Демек,

$$\text{егер } x_n \rightarrow x_0, \text{ онда } f(x_0) = x_0, \text{ олай болса, } f(x_n) \rightarrow x_0,$$

немесе

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = f(x_0) = x_0.$$

- 3 Дирихле функциясы

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{егер } x \text{ рационал сан болса,} \\ 0, & \text{егер } x \text{ иррационал сан болса.} \end{cases}$$

Дирихле функциясының сан өсінің бірде-бір нүктесінде шегі жоқ. Шынында, x_0 нүктесіне жинақты рационал сан тізбектеріне сәйкес келетін функция тізбегінің мәндері бірдей, ал x_0 нүктесіне жинақты иррационал сан тізбектерінің шегі нөлге тең болады.



Definition (Шексіз аз функция)

$y = \alpha(x)$ функциясын $x = x_0$ нүктесінде немесе $x \rightarrow x_0$ *шексіз аз* деп атайды, егер

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

Егер $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі шегі бар және $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$, онда

$$\alpha(x) = f(x) - b$$

функциясы x_0 нүктесінде шексіз аз. Шынында,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - b] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} b = b - b = 0.$$

Егер b саны $f(x)$ функциясының шегі болса, онда функция тұрақты b саны мен шексіз аз функцияның қосындысы түрінде өрнектеледі:

$$f(x) = b + \alpha(x), \quad \text{мұндағы} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

Theorem

Саны шекті (ақырлы) шексіз аз функциялардың алгебралық қосындысы, көбейтіндісі және шексіз аз функцияның шектелген функциямен көбейтіндісі шексіз аз функция.



Шексіз аз функцияларды салыстыру $\alpha(x), \beta(x)$ функциялары x_0 нүктесінде шексіз аз болсын.

1 Егер

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$

онда $\alpha(x)$ функциясын x_0 нүктесінде $\beta(x)$ қарағанда жоғары ретті шексіз аз деп атайды да, оны келесі түрде белгілейді

$$\alpha \Rightarrow \beta.$$

2 Егер

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A, \quad (A \neq 0),$$

онда $\alpha(x)$ пен $\beta(x)$ функцияларын x_0 нүктесінде бірдей ретті шексіз аздар деп атайды.

3 Егер

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

онда $\alpha(x)$ пен $\beta(x)$ функцияларын x_0 нүктесінде эквивалентті шексіз аздар деп атайды, оны келесі түрде жазады

$$\alpha(x) \sim \beta(x)$$

4 Егер $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = C, \quad (C \neq 0)$ онда x_0 нүктесінде шексіз аз $\alpha(x)$ функциясын шексіз аз $\beta(x)$ салыстырғанда аздығы k ретті деп атайды.



Ескерту. Егер $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ болғанда шексіз аз функцияның ұғымы мен салыстырулары жоғарыдағыдай жүргізіледі.

Мысалдар

- 1 $\sin x$ және x функциялары $x \rightarrow 0$ ұмтылғанда эквивалентті шексіз аз функциялар, себебі

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

- 2 $\sin 3x$ және $\sin 5x$ функциялары $x \rightarrow 0$ реті бірдей шексіз аз функциялар.



Қосымша ақпарат

Студент толық ақпаратты [1], [2], [3], [4], [5], [6] жұмыстардан қарауға болады.



Фихтенгольц Г.М.

Основы математического анализа. – М., 1968, 1972, 1956, 1960, 1964, 1957, 2002.



Демидович Б.П.

Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1997, 1990, 1977, 1962, 1998, 1969, 1966, 1958, 1956, 1952, 2002, 2004, 2006, 2005.



Темірғалиев Н.

Математикалық анализ. – Алматы, 1991.



Кудрявцев Л.Д.

Сборник задач по математическому анализу. – М., 1984, 1981, 1988, 2003.



Ильин В.А., Позняк Э.Г.

Основы математического анализа. Ч. 1. – М.: Наука, 1982, 1987, 1985, 2004, 2006



Сатығулова С., Искакова А.Қ., Айтжанов С.Е.

Математикалық анализ I. – Алматы: Қазақ университеті, 2020. -236 б.



Бурбаки Н.

Основные структуры анализа. Книга 1. Теория множеств. – Москва: Мир, 1965. -455 б.



НАЗАРЛАРЫҢЫЗҒА
РАҚМЕТ!

